DP/08-01

経済財政分析ディスカッション・ペーパー

# ～資産価格決定理論から見た安全債券利子率と経済成長率の関係～

清谷　春樹

*Economic Research Bureau*

CABINET OFFICE

内閣府政策統括官室（経済財政分析担当）

DP/08-01

2008 年２月

# ～資産価格決定理論から見た安全債券利子率と経済成長率の関係～

目　次

## ～資産価格決定理論から見た安全債券利子率と経済成長率の関係～

清谷春樹[1]

### 【要旨】

本稿は、標準的な一般均衡理論の枠組みに依拠して安全債券の利子率の決定についての分析を行う。経済成長に伴い消費量が拡大する経済においては、危険回避的で消費の平準化を望む家計は、貯蓄を行うよりも借入を行って現在の消費を増やすことに魅力を感じるため、債券保有を動機付けるために高い収益率が要求され、物価連動債の均衡利子率は成長率を上回る。他方、物価変動に不確実性のある経済において、物価と経済成長との相関が十分に強い場合には、名目安全債券の均衡実質収益率が低下し、名目利子率が一人当たりの名目成長率を下回る可能性がある。しかしながら、1980 年代以降の日本経済のデータを用いた数値シミュレーションの結果によると、貨幣乗数の大幅な低下のリスクが均衡名目利子率を引き下げる要因となるものの、平均的には名目利子率は一人当たりの名目成長率を上回るとの結果を得た。

1 内閣府計量分析室参事官補佐。

## 1. 序　論

### 1.1. 金利と成長率の関係

近年の日本経済においては、長期に渡って量的金融緩和政策が実施される中で、長期国債金利が経済成長率を下回る状況が続いてきた。仮に長期金利が平均的に経済成長率を下回るのだとすれば、債務償還を一切行わずに、借換えに伴う利払い分だけの基礎的財政収支赤字を維持していても、公債残高が対ＧＤＰ比で減少していくことが見込まれる。しかしながら、長期金利が平均経済成長率を上回る場合には、公債残高を発散させずに財政の持続可能性を確保するためには一定幅の基礎的財政収支黒字を確保することが不可欠となる。

このように金利と成長率の関係は、中長期的に健全性・持続性を確保しうるような財政政策運営のあり方を検討するうえで決定的な重要性をもつ。それにも関らず、わが国においては両者の関係について理論的な整理が十分になされているとは言い難く、論争の的となることがしばしばある。例えば、土居（2005）では、経済が動学的効率性を満たしているならば金利は成長率を上回るとしているが、新古典派経済成長モデルにおいて代表的個人の合理的行動と整合的な解は、動学的効率性を満たすような定常状態に到達する鞍点経路のみである[2]。しかしながら、こうした見解に対しては、新古典派経済成長理論が議論している利子率とは実物資本の収益率であって、これと国債のような安全資産の収益率がいかなる関係にあるのかは定かではないとの批判がありうる。例えばBohn（1999）では、米国経済においては長期的に資本収益率が経済成長率を上回っている一方、国債金利は成長率よりもかなり低い水準にとどまっており、経済の動学的効率性と低位の安全資産利子率とが必ずしも矛盾する現象ではないことが示唆されている。

また、過去のデータを見ても、対象とする国や時期によって結果が異なるため、確たる結論を導くことは難しい。土居（2005）は、ＯＥＣＤ諸国及びＧ７諸国のいずれを見ても、多くの年で長期国債金利が成長率を上回っていることに言及しているが、それでもＯＥＣＤ諸国で見ると、成長率が金利を上回った年は、1980年代半ば以降では全体の約25％、1990年代以降では約27％であることが紹介されている。わが国の場合には、より長期間を取れば金利が成長率よりも低い傾向が見出されるが、金利が政府の規制の下に置かれていた期間が含まれることに留意をする必要がある[3]。井堀（2005）は、今後、市場の需給に従って金利が決定される状況においては、金利が成長率を上回ると見るのが妥当との見解を示している。

[2] この点についての教科書的な説明は、例えば齊藤（2006）の第2章を参照。
[3] 「人為的低金利政策」とも呼ばれる1980年代以前の規制金利政策の概観や評価については、池尾（2001）を参照。

### 1.2. 本稿の目的と構成

以上のように、金利と成長率の関係、とりわけ財政の持続性の議論と直接の関連をもつ安全債券の利子率と経済成長率との関係については、データを解釈するための基準となる理論的な整理が十分になされているわけではない。そこで本稿では、金融資産としての安全債券の利子率の決定に焦点を絞り、標準的な一般均衡理論に立脚した資産価格決定モデルを用いて、合理的な投資家から成る資産市場において決定される安全債券の金利と経済成長との関係についての分析を行う。こうした理論的枠組の下では、安全債券は消費からの通時的な効用最大化を図る家計にとっての貯蓄手段の一つとして機能し、債券利子率は、貯蓄手段としての債券の有用性に対する評価に従って決定されることになる。

堀（2000）が概説しているように、家計や企業の合理的な行動と資産価格の変動を矛盾無く説明する試みとしての一般均衡理論の立場からの分析は、米国については既に理論及び実証の両面で豊富な蓄積があるものの、わが国については十分な積み重ねがあるとはいえない。そこで本稿は、Lucas（1978）や Lucas（1980）のような標準的な一般均衡理論に依拠して、わが国における安全債券利子率と経済成長の関係について、理論上の一定のベンチマークを得ることを目的とする。以下、次節において実質利子率の決定について概説した後、第３節において貨幣経済へのモデルの拡張を行う。第４節では、日本経済のデータを基にした理論モデルの数値シミュレーションを行い、名目・実質の安全債券利子率の理論値の算出を行う。最後に第５節で分析結果から得られる結論を述べる。

## 2. 実質利子率の決定

本節では、Lucas（1978）において分析がなされ、一般に「Lucas-Tree モデル」と呼ばれるような代表的個人の合理的な意思決定に基礎を置く標準的な動学一般均衡の枠組みにおいて、実質利子率がどのように決定され、一人当たり実質経済成長率と実質利子率とがどのような関係にあるのかについての考察を行う。

### 2.1. 家計の通時的効用最大化と実質安全利子率

同一の選好をもち、無限期間を生きる家計が多数存在する経済を考える。これら家計は、毎期確率的に変動する所得を受け取り、これを現在の消費に充てるか、将来の消費に充てるために、確定的な実質収益率を保証する安全債券の保有という形で貯蓄を行うものとする。

こうした枠組みの下では、実質利子率は、通時的効用の最大化を図る家計にとっての貯蓄手段としての安全債券の有用性に対する評価によって決定される。ここでの安全債券とは、実質価値でみて確定的な収益率を保証する物価連動債を意味し

ている。式の導出は付録に譲るが、代表的な家計が所与の予算制約の下で効用の最大化を実現する最適状態においては、以下の式が成立する[4]。

$$u'_t = R_t \beta E_t u'_{t+1}. \qquad (1)$$

ここで $u_t$, $R_t$ は時点 t における効用関数及び物価連動債の（粗）収益率、$\beta$ は主観的割引率を表す。オイラー方程式と呼ばれるこの式の意味するところは直截的である。今期に追加的に１単位の貯蓄を行うためには、１単位の消費をあきらめなければならない。式の左辺は、追加的な１単位の消費をあきらめることにより発生する限界不効用を表す。他方、追加的な１単位の貯蓄は、翌期に $R_t$ の収益をもたらす。式の右辺は、この収益がもたらす翌期の追加的な消費から得られる限界効用を表している。両辺が等しいということは、最適状態においては、追加的な１単位の債券投資により生じる現在の不効用と将来の効用が均等化するところで消費と貯蓄の意思決定が行われることを意味する。

Lucas-Tree モデルなどの標準的な資産価格決定モデルにおいては、異時点間で分離可能な相対的回避度一定の効用関数によって家計の選好を特徴付けることが一般的である。ここでもそうした標準的な定式化に従い、各時点における家計の効用関数を、相対的危険回避度一定の関数

$$u_t = \begin{cases} \dfrac{C_t^{1-\theta} - 1}{1-\theta}, & for \quad \theta \neq 1, \\ \ln C_t, & for \quad \theta = 1. \end{cases}$$

（$C_t$ は消費、$\theta$ は相対的危険回避度を表すパラメータ）

により特定化すると、（１）式は以下のようになる。

$$\left(\frac{1}{C_t}\right)^{\theta} = R_t \beta E_t \left(\frac{1}{C_{t+1}}\right)^{\theta}.$$

これを変形すると、次の式を得る。

[4] 式の導出については付録Ａを参照。

$$\frac{1}{R_t} = \beta E_t \left( \frac{C_t}{C_{t+1}} \right)^{\theta} = \beta E_t \left( \frac{1}{g_{t+1}^C} \right)^{\theta}, \qquad g_t^C = \frac{C_{t+1}}{C_t}. \tag{2}$$

### 2.2. 実質成長率と実質利子率の関係

（２）式より、実質利子率は、①将来の消費の主観的割引因子$\beta$、②一人当たり消費の成長率$g_t^C$、及び③家計の危険回避度$\theta$の３つの要因によって決定されることがわかる。経済全体が同一の選好をもつ家計のみから構成されているという仮定の下では、すべての経済主体が同じ意思決定をするため、均衡においては所得はすべて消費に充てられており、消費の成長率は経済成長率に等しい。したがって、利子率と経済成長率との関係に即して言えば、成長率が高ければ高いほど利子率も高くなるという関係が成立する。両者の大小関係については、主観的割引率が正（すなわち$\beta < 1$）及び、家計が十分に危険回避的（$\theta \geq 1$）という標準的な仮定の下では、実質利子率は一人当たりの実質経済成長率よりも高くなり、主観的割引率が高ければ高いほど、また、家計の危険回避度が高ければ高いほど、利子率と成長率との格差は大きくなる。

まず、主観的割引率の影響が意味するところは明らかであろう。家計にとって、主観的割引率が正であるということは、消費量が同じであれば、現在の消費の方が将来の消費よりも高い効用をもたらすということである。そのような場合には、たとえ経済成長がゼロの経済においても、現在の消費を放棄することへの対価として、債券に対して正の利子率が要求されるはずである。経済成長に伴って消費が拡大するケースでも、この現在の消費を放棄する対価の分だけ、利子率は消費の成長率よりも高くなる。

次に、危険回避度の影響を直感的に説明すると、以下のようになる。「家計が危険回避的である」ということは、家計は時間とともに消費量が変動するような消費パターンよりも、時点にかかわらず消費量が安定的な状態を好ましいと感じるということを意味している。このような選好をもつ家計は、貯蓄という手段を通じて消費の平準化を図るのであるが、経済成長とともに将来に渡って消費量が拡大していくことが期待される状況の下では、家計は債券への投資を行うよりもむしろ、借入を行って将来の消費を取り崩し、現在の消費を増加させようとする。したがって、経済成長が正のケースでは、家計が消費を平準化したいという願望が強ければ強いほど（すなわち、危険回避度が高ければ高いほど）、債券保有に対する需要が低下する。このような家計に対してもなお債券の保有を促し、均衡を実現するためには、その代償としてより高い収益率が必要とされることが理解されよう。

## 3. 貨幣経済における名目利子率の決定

前節では、実質利子率の決定要因についての考察を行い、標準的な仮定の下では、実質利子率が実質経済成長率を上回ることを示した。しかしながら、財政に関する長期予測や、その前提に関する議論において論点とされてきたのは、名目利子率と名目経済成長率との関係である。そこで本節では、前節で用いたような一般均衡理論の枠組みを貨幣経済へと拡張し、前節の実質利子率と実質経済成長率との関係が、名目の世界においてもパラレルに成立するかどうかについての考察を行う。

### 3.1. 貨幣経済へのモデルの拡張

本節では、Lucas (1980)と同様に、家計の消費・貯蓄の意思決定が、予算制約に加えて消費財の購入には前もってそれに充てるための貨幣を保有していなければならないとする「キャッシュ・イン・アドバンス (Cash-in-Advance) 制約[5]」に服するとの追加的な仮定を設けることによって貨幣を導入する。具体的には、物価水準を$P_t$として、消費財の取引高$P_t C_t$と貨幣残高$M_t$との間に以下の関係が満たされなければならないこととする。

$$M_t = P_t\, C_t.$$

### 3.2. 名目安全利子率の決定式

以上のような定式化の下で家計が通時的な効用最大化を行う場合、最適状態においては、名目価値で一定の（粗）収益率$N_t$を保証する安全債券と消費との間に以下の関係が成立する[6]。

$$\frac{u'_t}{P_t} = N_t\, \beta\, E_t\left(\frac{u'_{t+1}}{P_{t+1}}\right).$$

左辺は今期に名目で１単位の追加的な債券投資を行う場合にあきらめなければならない消費から生じる限界不効用を表す。１単位の追加的な債券保有は、１単位の貨幣保有の放棄を意味する。キャッシュ・イン・アドバンス制約に照らせば、１単位の貨幣は$1/P_t$単位の消費財の取引を生むのであるから、これは実質価値でみて$1/P_t$単位の消費をあきらめることに相当する。これを効用によって評価したものが左辺である。一方、右辺は今期の名目１単位の追加的な債券保有が来期にもたらす限界効用を表している。今期の名目債券の保有は、来期には$N_t$単位の名目収益をも

[5] Clower (1967)において最初に提唱されたため、「クラウアー制約」とも呼ばれる。
[6] 式の導出については、付録Ｂを参照。

たらす。これを貨幣に交換することにより、実質で$N_t/P_{t+1}$単位の消費を行うことが可能となる。これを効用によって評価したものが右辺である。物価連動債の場合と同様に、家計は追加的な債券保有がもたらす限界効用と限界不効用とが均等化するように意思決定を行っていることになる。前節に従い、相対的危険回避度が一定の効用関数による定式化を行った場合、上の式は次のようになる。

$$\frac{1}{N_t}=\beta E_t\left[\left(\frac{C_t}{C_{t+1}}\right)^{\theta}\frac{P_t}{P_{t+1}}\right]=\beta E_t\left[\left(\frac{1}{g_{t+1}^C}\right)^{\theta}\frac{1}{\pi_{t+1}}\right],\qquad \pi_{t+1}=\frac{P_{t+1}}{P_t}. \quad (3)$$

### 3.3. 名目債券の保有に対するプレミアムの可能性

（３）式によって決定される名目利子率は、前節において示された実質利子率の振る舞いとパラレルな関係をもつのであろうか。（３）式を更に展開すると、以下の関係を得る。

$$\frac{1}{N_t}=\beta E_t\left[\left(\frac{1}{g_{t+1}^C}\right)^{\theta}\frac{1}{\pi_{t+1}}\right]=\beta\left\{E_t\left(\frac{1}{g_{t+1}^C}\right)^{\theta}E_t\left(\frac{1}{\pi_{t+1}}\right)+Cov_t\left[\left(\frac{1}{g_{t+1}^C}\right)^{\theta},\frac{1}{\pi_{t+1}}\right]\right\}. \quad (4)$$

（４）式の最右辺の最後の項を見ると、名目利子率は、消費の実質成長率（に起因する限界効用の変化率）や期待物価変化率各々の動向だけでなく、両者の共分散によっても影響を受けることがわかる。定性的に言えば、実質経済成長率とインフレ率が正の相関をもつ場合には名目利子率が低くなり、実質経済成長率とインフレ率が負の相関をもつ場合には名目利子率は高くなる。

このことを、物価連動債の収益率との対比で確認してみよう。まず、名目債券の保有から得られる事前の（ex ante）実質期待収益率を以下のように定義する。

$$R_t^N=N_t\,E_t\left(\frac{1}{\pi_{t+1}}\right).$$

（３）式を用いてこの式を展開すると、以下の結果を得る。

$$R_t^N=E_t\left(\frac{1}{\pi_{t+1}}\right)\Big/\beta E_t\left[\left(\frac{1}{g_{t+1}^C}\right)^{\theta}\frac{1}{\pi_{t+1}}\right]$$

$$= E_t\left(\frac{1}{\pi_{t+1}}\right)\Big/\beta\left\{Cov_t\left[\left(\frac{1}{g_{t+1}^C}\right)^\theta,\frac{1}{\pi_{t+1}}\right]-E_t\left(\frac{1}{g_{t+1}^C}\right)^\theta E_t\left(\frac{1}{\pi_{t+1}}\right)\right\}.$$

したがって物価連動債の保有からの収益率と名目債券の保有の実質期待収益率との間には、以下の関係が成立することがわかる。

$$R_t^N - R_t = -Cov_t\left[\left(\frac{1}{g_{t+1}^C}\right)^\theta,\frac{1}{\pi_{t+1}}\right]\Big/\beta K_t\ , \qquad (5)$$

$$K_t = E_t\left(\frac{1}{g_{t+1}^C}\right)^\theta\left\{Cov_t\left[\left(\frac{1}{g_{t+1}^C}\right)^\theta,\frac{1}{\pi_{t+1}}\right]-E_t\left(\frac{1}{g_{t+1}^C}\right)^\theta E_t\left(\frac{1}{\pi_{t+1}}\right)\right\}.$$

すなわち、実質経済成長率と物価変動率との共分散の符号次第で、名目債券からの実質収益率には正負いずれかのプレミアムが乗ることになる[7]。具体的には、インフレーションが経済成長と正の相関をもつ場合には、名目債券の保有からの実質期待収益率は実質利子率を下回る。逆に、インフレーションが経済成長と負の相関をもつ場合には、名目債券の実質収益率は実質利子率を上回らなければならない。

このことは、直感的にはどのように理解できるだろうか。まず、名目の安全債券は、実質価値でみた消費の安定化を図る家計にとっては、決して安全資産ではないということに着目する必要がある。すなわち、物価変動に不確実性が伴う経済においては、名目債券は実質収益率に不確実性を伴う資産なのである。例えばインフレーションが経済成長と正の相関をもつ場合には、高成長により消費が拡大し、家計がこれ以上消費を拡大したくないと考える時期に名目債券の収益率は低下する一方、成長率が低下して消費水準が低下し、消費平準化の観点から家計が消費を拡大したいと望む時期には名目債券の収益率は上昇する。名目債券の実質収益率が経済環境の変化に応じてこのように事後的に調整されるならば、経済環境の変化にもかかわらず事後的な実質収益率が不変である物価連動債よりも家計にとっては魅力的な投資対象である。したがって、均衡において名目債券の保有に対して要求される実質期待収益率は、物価連動債の収益率よりも低くて済むため、その分だけ均衡名目利

7 したがって家計が危険回避的である場合には、名目利子率＝実質利子率＋期待インフレ率というフィッシャー方程式は一般的には成立しないことになる。また、更に厳密に言えば、利子率の決定式に表れているのは、インフレ率の期待値ではなく、その逆数の期待値であるが、一般にある確率変数の期待値の逆数と、その変数の逆数の期待値とは必ずしも一致しない（ジェンセンの不等式）。Sarte (1998)はこの二つの点に着目して、米国におけるフィッシャー方程式と期待インフレ率の関係についての実証分析を行っている。

子率は低くなる。

逆に、インフレーションが経済成長と負の相関をもつ場合における名目債券の保有は、経済成長率が高く、これ以上の消費の拡大が必要ではない時期にもかかわらず高い収益率をもたらし、経済環境が悪化し、消費の拡大が望ましい時期には低い収益率しかもたらさないという意味で、消費の平準化を図る家計にとっては好ましくない資産であるということになる。この場合の均衡においては、物価連動債の収益率よりも高い収益率が名目債券に対して要求されることとなり、その分だけ均衡名目利子率は高い水準となる。

### 3.4. 名目経済成長率と貨幣供給量及び名目利子率の関係

以上のように、インフレーションと経済成長との関係次第では、名目利子率は相対的に低い水準にも高い水準にもなり得る。したがって、経済成長率と利子率との関係は実質成長率と実質利子率の関係ほど単純ではない。本稿のモデルでは、インフレーションの動きは貨幣供給量の動きに左右されており、貨幣供給プロセスが経済成長との間でいかなる関係をもつかによって、名目経済成長率と名目利子率との関係が影響を受けることとなる。

まず、本稿のモデルにおいて、インフレーションと実質貨幣残高及び名目貨幣供給量との間には、次の関係が成立することに着目されたい。

$$\pi_{t+1} = \frac{P_{t+1}}{P_t} = \frac{M_t}{P_t}\frac{P_{t+1}}{M_{t+1}}\frac{M_{t+1}}{M_t} = \frac{m_t}{m_{t+1}}\frac{M_{t+1}}{M_t}, \quad m_t = \frac{M_t}{P_t}.$$

次に、キャッシュ・イン・アドバンス制約により、均衡においては実質貨幣残高は消費財の購入量に等しく、

$$m_t = C_t.$$

が成立している。したがって、このモデルにおける物価変化率は、消費の成長率と貨幣供給量の変化率とによって決定されることとなる。

$$\pi_{t+1} = \frac{1}{g_{t+1}^C}\frac{M_{t+1}}{M_t}.$$

更に、民間の家計部門が保有する貨幣供給量$M$が、貨幣乗数$\alpha$を通じて中央銀行の供給するマネタリーベース$MB$と結び付けられていると考えると、

$$M_t = \alpha_t MB_t.$$

と表すことができる。したがって、

$$\pi_{t+1} = \frac{1}{g_{t+1}^C} g_{t+1}^{\alpha} \mu_t, \qquad g_{t+1}^{\alpha} = \frac{\alpha_{t+1}}{\alpha_t}, \quad \mu_{t+1} = \frac{MB_{t+1}}{MB_t}.$$

が成立する。これを用いて最適状態を表現する（３）式を書き直すと、

$$\frac{1}{N_t} = \beta E_t \left[ \left( \frac{1}{g_{t+1}^C} \right)^{\theta} \frac{1}{\pi_{t+1}} \right] = \beta E_t \left[ \left( \frac{1}{g_{t+1}^C} \right)^{\theta-1} \frac{1}{g_{t+1}^{\alpha}} \frac{1}{\mu_{t+1}} \right]. \qquad (6)$$

を得る。また、名目債券の保有からの超過収益率を表す（５）式についても、

$$R_t^N - R_t = -Cov_t \left[ \left( \frac{1}{g_{t+1}^C} \right)^{\theta-1}, \frac{1}{g_{t+1}^{\alpha}} \frac{1}{\mu_{t+1}} \right] \Big/ \beta K_t\,, \qquad (7)$$

が成立することがわかる。

## 4. 理論モデルの数値シミュレーション

以上のように、標準的な一般均衡理論の枠組においては、実質利子率は一人当たりの実質経済成長率を上回ること、他方、名目利子率については、貨幣供給の変動に起因するインフレーションと経済成長率といかなる関係をもつかによって、均衡利子率の水準が影響を受けることが明らかとなった。このため、理論上は名目利子率と名目経済成長率との高低について、確定的な結論を下すことはできないことになる。そこで本節では、現実に観察される実質消費や貨幣供給についての統計データによって理論モデルに対する制約を加え、その範囲内で経済成長と利子率とがいかなる関係にあるのかについて検証を行う。

### 4.1. 標準ケースの数値シミュレーション

最初に、日本における 1980 年代以降の暦年データを用いたシンプルなシミュレーションを行う。1980 年～2006 年にかけての日本においては、生産年齢人口一人人当たりの実質民間最終消費支出の成長率は平均で 1.4％であり、その標準偏差は 1.2％

であった。こうしたデータに基づき、一人当たり消費の実質成長率が確率変数であり、「高成長」（平均成長率＋標準偏差＝2.6%）か「低成長」（平均成長率－標準偏差＝0.1%）のいずれかの局面が実現するものとする。消費の成長率はマルコフ過程によって特徴付けられるものとし、「高成長」と「低成長」との間の遷移は２行×２列の対称な遷移確率行列$\Phi$によって支配されるものとする[8]。

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi & 1-\phi \\ 1-\phi & \phi \end{pmatrix}.$$

遷移確率行列の各要素は、当期にある局面が実現したものとして、そこから次期に同じ局面あるいは他方の局面が実現する確率、すなわち条件付確率を表している。一般に$\Phi$の無限積$\Phi^{\infty}$は各々の局面の無条件発生確率を表すことが知られている。ここで取り扱うような対称行列の場合には、それぞれの局面が発生する確率は等しく１/２である。

遷移行列のパラメータ$\phi$が１に近い値を取るほど、同じ局面が繰り返し実現しやすくなる。逆に$\phi$がゼロに近いほど、「高成長」か「低成長」いずれか一方の局面が実現した後は、他方の局面に移行しやすくなる。この意味で、$\phi$は各々の局面の粘着性を表す。一般に、$2\phi-1$がこれらの局面を特徴付ける変数（ここでは一人当たり実質消費成長率）の自己相関係数に等しくなることが知られている。対象期間中の一人当たり実質消費成長率の自己相関係数は 0.61 であることから、ここでは$\phi = 0.804$とする。

貨幣供給については、マネタリーベースの変化率と消費の成長率との関係を考慮に入れ、以下の関係を想定した。

$$\mu_t = \mu \left(g_t^C\right)^{\gamma}.$$

$$\Rightarrow \ln \mu_t = \ln \mu + \gamma \ln g_t^C.$$

$$\Rightarrow \mu_t - 1 \cong \mu - 1 + \gamma\left(g_t^C - 1\right). \qquad (8)$$

パラメータの値を特定化するために、（８）式に基づいてマネタリーベースの（純）成長率を定数項及び消費の（純）成長率に最小二乗回帰させたところ、$\mu - 1 = 0.0579$、$\gamma = -0.0909$を得た。少なくとも対象期間全体を通じては、マネタリーベースと経済成長率との間には強い相関は見られない。

8 マルコフ過程の入門的な解説については、Simon and Blume (1993)の第 23 章などを参照。

マネタリーベースと貨幣供給量とを仲介する貨幣乗数については、対象期間を通じて平均 1.18％の下落がみられるため、$g_t^{\alpha}=0.9882$ とした。この他、家計の主観的割引率 $\beta$ は 0.99、相対的危険回避度 $\theta$ は１としている。図表１にこれらのパラメータの値を要約している。

以上のパラメータ設定の下で理論モデルの数値シミュレーションを行った結果を図表２に示している。まず、第２節の実質経済のモデルが示したように、実質利子率は 2.6％の高成長の期間には 3.2％、0.1％の低成長の期間には 1.6％と、それぞれ実質成長率を上回っており、平均すると利子率が成長率よりも１％ポイント程度高くなっている。マネタリーベースと消費の成長率との間にはごく小さな負の相関があるため、消費の限界効用の変化率と期待物価変化率との共分散はわずかに負の値を取る。この結果、名目債券に対しては物価連動債と比べてより高い均衡実質収益率が要求されるため、名目でみると利子率と成長率の格差はやや拡大する。名目利子率は高成長の局面では 1.1％ポイント程度、低成長の局面では１％ポイント程度名目成長率を上回る。

## 4.2. 貨幣乗数の大幅な低下を考慮するケース

このように、標準的なモデルの数値シミュレーションにおいては、実質でみても名目でみても、高成長・低成長のいずれの局面においても利子率が成長率を上回るという結果が得られた。また、成長率と物価変動が負の相関をもつ結果、物価連動債と比較すると名目債券には正のプレミアムが上乗せされる。しかしこれは、本稿と同様に Lucas-Tree モデルに依拠して名目利子率の理論値を分析した竹田・矢嶋（2006）の結果とは異なる。彼らは貨幣供給プロセスを明示的に考慮するのではなく、（３）式に基づいて直接にインフレ率と経済成長率との標本共分散を用いて名目利子率の理論値を算出しているが、それによると標本共分散は正の値を取っており、名目債券には負のプレミアムが発生しているとのことである。また、標準的なモデルでは、時期によって名目金利が成長率を下回る現象が見られることを説明することができない。

これらの問題をどのように説明すればよいのだろうか。理論的には、成長率とインフレーションとの共分散がより高ければ、均衡名目利子率はより低いものとなる。そこで本稿では、過去の成長率の低下局面において、貨幣乗数の大幅な低下が発生することがあったことに着目し、標準的な貨幣経済のモデルの拡張を試みることとする。

### 4.2.1. 不況期における貨幣乗数の低下

図表３に 1970 年代以降の貨幣乗数（M2＋CD とマネタリーベースの比率）の推移を示している。これによると貨幣乗数は 1974 年から 1975 年及び 2002 年から

2004 年及び 2003 年にかけて顕著に下落している。いずれのケースにおいても直後に反発的な上昇が見られるものの、直ちに元の水準に戻るには至らず、下落直後の貨幣乗数はそれまでと比べて 10～20%程度低くなっている。

貨幣乗数の変化要因について、飯田・原田・浜田（2003）は１）金利の変動に伴う貨幣保有の機会費用の変化を乗数の変化要因と捉える Bailey-Friedman 仮説（B-F 仮説）と、２）景気変動に伴う貨幣需要の取引動機の変化を乗数の変化要因と捉える Mitchell-Hawtrey 仮説（M-H 仮説）とに分類する。彼らの実証分析の結果によれば、1980 年代及び 1990 年代ともに名目金利の変化に影響を及ぼす期待インフレ率の変化が、貨幣乗数の変化に有意な影響力をもっており、B-F 仮説と整合的な結果を得ているとのことである。貨幣乗数の決定要因の仔細については本稿における分析の対象外とするが、前節のモデルにおいては、貨幣の取引需要はキャッシュ・イン・アドバンス制約を通じて反映されていると考えれば、一時的な期待インフレ率のシフトが貨幣乗数の変化を引き起こすものと解釈し、B-F 仮説が成立する余地があるものと考えられる。

貨幣乗数が低下する場合、マネタリーベースの拡大ほどには貨幣供給は増加しなくなる。したがって成長率が低下する時期に貨幣乗数の大幅な低下が起きると、物価はデフレの方向に動く。所得が低下する時期にインフレ率が大きく低下するならば、名目債券の実質収益は不況期に高まることとなる。このことは危険回避的な家計にとっての名目債券保有の魅力を増し、均衡名目利子率はより低い水準のものとなることが期待される。

このような考え方に基づいて、前節で展開されたモデルを更に拡張し、１）高成長、２）低成長に加えて、３）低成長期に貨幣乗数が大幅に低下する局面の３つの状態が実現しうるものとして数値シミュレーションを行う。消費の成長率や貨幣供給の平均成長率などの基本的なパラメータについては標準的なモデルとまったく同じ設定であるが、３）の貨幣乗数の低下局面においては、貨幣乗数の低下率が 15%となることとする。但し、このような極端なショックは粘着性をもたず、次期には通常の高成長局面か低成長局面のいずれかに回帰するものと仮定する。すなわち、拡張モデルにおける経済の状態は、次のような３行×３列の遷移確率行列によって支配される[9]。

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi & 1-\phi-\delta & \delta \\ 1-\phi & \phi-\delta & \delta \\ 1-\phi & \phi & 0 \end{pmatrix}.$$

[9] このように発生確率は低いものの、経済状態の大幅な変化が引き起こされる局面を想定する手法は、標準的な一般均衡理論によっては、現実に観察される大幅な株式保有からの超過収益を説明できない（いわゆるエクイティ・プレミアム・パズル）という問題に対する Rietz (1988)の提案と類似するものである。

貨幣乗数の大幅な低下の発生を支配するパラメータ$\delta$については、ショックの発生確率が５％程度（すなわち 20 年に１度程度の発生確率）となるよう、$\delta = 0.05265$とした。

図表４に、貨幣乗数低下ショックを考慮に入れたモデルの数値シミュレーション結果を示す。発生確率は低いものの、成長率の低下に伴い大幅なデフレが起きるリスクが存在することにより、消費の限界効用の変化率と物価変動率との共分散は正の値に転じている。この結果、高成長・低成長のいずれの場合においても、標準モデルと比較すると均衡名目利子率は 17～18 ベーシスポイント（0.17～0.18％ポイント）低下している。また、物価連動債と比べると名目債券の保有の方が魅力的となるため、名目債券に対して要求される均衡実質収益率は低くなり、利子率と成長率の格差は実質よりも名目において小さくなる（実質で１％ポイント程度であるのに対し、名目では 0.9％ポイント程度）。とはいえ、名目利子率は高成長・低成長・貨幣乗数低下のいずれの局面においても経済成長率よりも高く、ここで与えたパラメータは、利子率が経済成長率よりも低くなる局面を再現するうえでは不十分であることがわかる。

#### 4.2.2. 貨幣乗数低下ショックの発生確率が高いケース

しかしながら、平時において例を見ないような貨幣乗数の大幅な低下が発生する確率というものは、多分に主観的なものである。このようなショックが発生したことが無かった時期においては、発生するリスク自体が認識されたことが無かった可能性が高いし、逆に実際に貨幣乗数の大幅な低下が発生して間もない 1970 年代前半や足元においては、発生確率がかなり高く見積もられている可能性もある。

そこで、貨幣乗数の大幅な低下が生じる確率が 10％程度（10 年に１度程度の発生確率）に高まった場合に、均衡利子率がどのように変化するかをシミュレーションした結果が図表５である。消費の限界効用の変化率と物価変動率との間の正の共分散は高まり、名目利子率と名目成長率との格差は 0.8％ポイント程度にまで縮小している。また、通常の高成長及び低成長の局面においては、名目利子率が名目成長率をそれぞれ 1.0％及び 1.1％ポイント程度下回るという結果が得られる。

したがって、ここでの数値シミュレーションの結果に即して言えば、貨幣乗数の大幅な低下の記憶が新しく、その発生確率が相当高く見積もられている場合には、平時において名目経済成長率を下回る名目利子率が発生しうるということになる。但し、理論が示すところに従えば、貨幣乗数の大幅な低下が発生する局面においては、翌期には通常の局面に回帰することが期待されるため、大幅なデフレが発生する一方で名目利子率は相対的に高水準にとどまる結果、名目利子率が

名目成長率を大幅に上回る。このため、すべての局面を平均してみるとやはり名目でみても利子率が成長率を上回るという結果が得られる。

## 5. 結　論

将来に渡る財政の持続可能性を展望する際に、金利と経済成長率との格差は決定的な重要性をもつ。本稿では、標準的な一般均衡理論に基づく資産価格決定理論に依拠して、市場の需給関係によって決まる安全債券の利子率が、経済成長率といかなる関係にあるのかについての分析を行った。

本稿の理論的な枠組みにおいては、平均的に正の経済成長率が期待される経済においては、実質利子率は実質成長率を上回る。これは、債券保有者である家計が危険回避的で消費の平準化を望む限り、実質消費の拡大が期待される経済においては、将来の消費に充てるために債券保有という形態で貯蓄を行うよりも、借入を行って現在の消費を増やすことの方に魅力を感じるためである。このような家計に対して債券保有を動機付けるためには、高い実質収益率が約束されなければならず、均衡利子率は成長率を上回ることとなる。

他方、名目利子率については、実質利子率ほど成長率との関係は単純ではない。物価の変動に不確実性を伴う経済においては、名目の安全債券は事後的に実質収益率が変動するリスク資産であるからである。物価変動率が成長率と正の相関をもつ場合には、不況期に実質収益率が高まるという点で名目債券は魅力的な投資対象となり、均衡において要求される名目利子率は低くなる。本稿では、過去の経済成長率の低下局面における貨幣乗数の大幅な低下が、成長率と物価変動率との相関を強めた可能性をも考慮して理論モデルの数値シミュレーションを行った。こうした大規模な貨幣的ショックが発生する可能性の認識は、平時における均衡名目利子率を低下させ、利子率が成長率を下回る局面を生む要因となりうる。しかしながら、そのようなショックが 10 年から 20 年に一度程度の頻度でしか発生しないというパラメータ設定の範囲内では、すべての局面を平均してみれば、依然として名目利子率は名目経済成長率を上回るとの結果を得た。

本稿における分析の土台となっている標準的な一般均衡モデルが、リスクと向き合う経済主体の行動と資産価格の変動との関係のあらゆる側面を矛盾無く説明できるわけではなく、実証面での課題に対応して理論モデルにも様々な拡張が行われてきている点には留意する必要がある[10]。また、本稿において利子率の直接の比較対象とな

[10] 具体的には、標準的な Lucas-Tree モデルでは株式市場での大幅な超過収益率と極端に低い安全資産の収益率の双方を整合的に説明することができない。この問題に対して、効用関数の定式化の変更や、Rietz（1988）のような極端なショックの導入、経済主体間の異質性の考慮など様々な提案がなされている。例えば齊藤（2007）は、保険市場の欠落や流動性制約、契約履行性の問題など、市場の不完備性によって「高すぎるリスク・プレミアム」と「低すぎる利子率」とが整合的に説明される可能性を示している。

っているのは一人当たりの経済成長率であるが、中長期的な財政展望との関係で議論されるのは利子率と経済全体の成長率との関係であることから、結果の解釈には注意が必要である[11]。しかしながら、資産価格決定理論の観点から安全資産の収益率としての利子率と経済成長率との関係を議論するうえで、標準的なモデルに基づく分析結果は、一定のベンチマークとしての役割を果たすことが期待される。

[11] もっとも、今後人口減少が見込まれる日本経済の場合には、マクロ経済の成長率は一人当たり成長率を下回ることが見込まれるので、平均的に利子率が成長率を上回るとする本稿の理論的含意に定性的に大きな変更が加えられるわけではないと考えられる。

【参考文献】


Bohn, Henning, "Fiscal Policy and the Mehra-Prescott Puzzle: On the Welfare Implications of Budget Deficits when Real Interest Rates are Low." *Journal of Money, Credit and Banking*, Vol. 31, Issue 1, 1999, 1-13.

Clower, Robert W., "A Reconsideration of the Microfoundations of Monetary Theory." *Western Economic Journal*, Vol. 6, No.1, 1967, 1-9.

Lucas, Robert E. Jr., "Asset Prices in an Exchange Economy." *Econometrica*, Vol. 46, No. 6, 1978, 1429-1445.

____________. "Equilibrium in a Pure Currency Economy." *Economic Inquiry*, Vol. 18, No. 2, 1980, 203-220.

Rietz, Thomas A., "The Equity Risk Premium: A Solution." *Journal of Monetary Economics*, Vol.22, Issue 1, 1988, 117-131.

Sarte, Pierre-Daniel G., "Fisher's Equation and the Inflation Risk Premium in a Simple Endowment Economy." Federal Reserve Bank of Richmond, *Economic Quarterly*, Vol. 84, No. 4, 1998, 53-72.

Simon, Carl P. and Lawrence Blume, *Mathematics for Economists*. New York, NY, W. W. Norton & Company, 1993.

飯田泰之・原田泰・浜田宏一「信用乗数の変化はいかに説明できるか」内閣府経済社会総合研究所『経済分析』第 171 号、2003 年

池尾和人「戦後日本の金融システムの形成と展開、そして劣化」財務省財務総合政策研究所『フィナンシャル・レビュー』第 54 号、2001 年

井堀利宏「歳出削減・増税の組合せと実施のタイミング」貝塚啓明・財務省財務総合政策研究所編著『財政赤字と日本経済　財政健全化への理論と政策』、有斐閣、2005 年

齊藤誠『新しいマクロ経済学　クラシカルとケインジアンの邂逅　第２版』有斐閣、2006 年

______.『資産価格とマクロ経済』日本経済新聞出版社、2007 年

土居丈朗「国債管理政策をめぐる経済分析：展望と示唆」財務省財務総合政策研究所『フィナンシャル・レビュー』第 76 号、2005 年

竹田陽介・矢嶋康次「景気変動と長期金利：Ｇ７諸国に関する実証分析」『ニッセイ基礎研所報』Vol.43、2006 年

堀敬一「資産価格パズル」筒井義郎編『金融分析の最先端』、東洋経済新報社、2000 年

図表１　数値シミュレーションにおけるパラメータ設定

| | $g^C$ | $\varphi$ | $\mu$ | $\gamma$ | $g^\alpha$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 高成長 | 1.0262 | 0.804 | 1.0579 | -0.0909 | 0.9882 |
| 低成長 | 1.0013 | | | | |

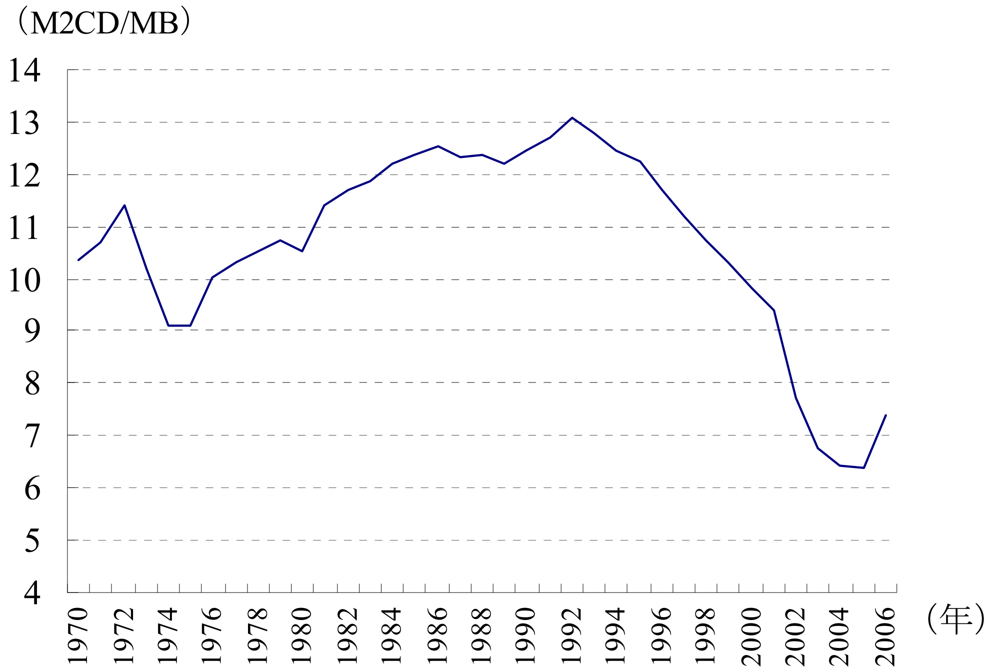
| $\beta$ | $\theta$ |
|---|---|
| 0.99 | 1 |

図表２　理論モデルの数値シミュレーション結果（標準ケース）

| | 成長率 | | | 期待物価 | 利子率 | | 利子率－成長率 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 発生確率 | 実質成長率 | 名目成長率 | $E_t(1/\pi_{t+1})$ | 実質利子率 | 名目利子率 | 実質 | 名目 |
| 高成長 | 0.50 | 2.62 | 4.29 | 0.9789 | 3.16 | 5.39 | 0.534 | 1.100 |
| 低成長 | 0.50 | 0.13 | 4.53 | 0.9630 | 1.62 | 5.54 | 1.495 | 1.010 |
| 平　均 | | 1.38 | 4.41 | 0.9710 | 2.39 | 5.46 | 1.014 | 1.055 |

| 共分散 |
|---|
| $Cov_t[(1/g^C_{t+1})^\theta,(1/\pi_{t+1})]$ |
| -0.0000995 |

図表３　1970 年代以降の貨幣乗数の推移



図表４　理論モデルの数値シミュレーション結果（拡張ケース）

| | | 成長率 | | 期待物価 | 利子率 | | 利子率－成長率 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 発生確率 | 実質成長率 | 名目成長率 | $E_t(1/\pi_{t+1})$ | 実質利子率 | 名目利子率 | 実質 | 名目 |
| 高成長 | 0.50 | 2.62 | 5.06 | 0.9803 | 3.16 | 5.22 | 0.534 | 0.161 |
| 低成長 | 0.45 | 0.13 | 5.30 | 0.9646 | 1.62 | 5.36 | 1.495 | 0.068 |
| 貨幣乗数低下 | 0.05 | 0.13 | -10.09 | 0.9560 | 1.62 | 6.31 | 1.495 | 16.403 |
| 平　均 | | 1.38 | 4.41 | 0.9720 | 2.39 | 5.34 | 1.014 | 0.932 |

| 共分散 |
|---|
| $Cov_t[(1/g^C_{t+1})^\theta,(1/\pi_{t+1})]$ |
| 0.0000684 |

図表５　理論モデルの数値シミュレーション結果

（拡張ケース・貨幣乗数の発生確率大）

| | | 成長率 | | 期待物価 | 利子率 | | 利子率－成長率 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 発生確率 | 実質成長率 | 名目成長率 | $E_t(1/\pi_{t+1})$ | 実質利子率 | 名目利子率 | 実質 | 名目 |
| 高成長 | 0.50 | 2.62 | 5.91 | 0.9828 | 3.16 | 4.93 | 0.534 | -0.986 |
| 低成長 | 0.40 | 0.13 | 6.15 | 0.9672 | 1.62 | 5.07 | 1.495 | -1.083 |
| 貨幣乗数低下 | 0.10 | 0.13 | -10.09 | 0.9483 | 1.62 | 7.18 | 1.495 | 17.266 |
| 平　均 | | 1.38 | 4.41 | 0.9731 | 2.39 | 5.21 | 1.014 | 0.801 |

| 共分散 |
|---|
| $Cov_t[(1/g^C_{t+1})^\theta,(1/\pi_{t+1})]$ |
| 0.0002716 |

## 付録Ａ　実質利子率についてのオイラー方程式の導出

ここでは、代表的家計にとっての最適な意思決定の条件式として得られる実質利子率に関する条件式（本文中の（１）式）を導出する。

無限期間を生きる代表的家計が、生涯期待効用

$$E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u_t. \text{（}\beta\text{は主観的割引率、}u_t\text{は効用関数を表す。）}$$

を以下の予算制約の下で最大化するものとする。

$$Y_t + R_{t-1} b_{t-1} = b_t + C_t.$$

ここで、$Y_t$， $R_t$， $b_t$， $C_t$ は時点ｔにおける所得、物価連動債の保有から得られる（粗）収益率、物価連動債の保有量、消費を表す。この最適化問題の解を、時点ｔにおける状態変数の値についての関数（価値関数）$V_t$ として表現することにより、家計が直面する意思決定の問題を動的計画法によって次のように表現することができる。

$$V_t = \max \left\{ u_t + \beta E_t V_{t+1} + \lambda_t \left( Y_t + R_{t-1} b_{t-1} - b_t - C_t \right) \right\}.$$

最適化の一階の条件は以下のようになる。

$$u_t' = \lambda_t. \qquad \text{（A－１）}$$

$$\beta\, E_t \frac{\partial V_{t+1}}{\partial b_t} = \lambda_t. \qquad \text{（A－２）}$$

包絡面定理により、次の関係が成立する。

$$\frac{\partial V_t}{\partial b_{t-1}} = R_{t-1} \lambda_t.$$

これを用いると、１期間先には次の関係が成立することがわかる。

$$\frac{\partial V_{t+1}}{\partial b_t} = R_t \lambda_{t+1}. \qquad (A-3)$$

（A－１）、（A－２）及び（A－３）より、本文における物価連動債の保有に関する最適条件（１）を得る。

$$u_t' = R_t \beta E_t u_{t+1}'.$$

## 付録Ｂ　名目利子率についてのオイラー方程式の導出

ここでは、代表的家計にとっての最適な意思決定の条件式として得られる名目利子率に関する条件式（本文中の（３）式）を導出する。

無限期間を生きる代表的家計が、生涯期待効用

$$E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u_t.$$（$\beta$ は主観的割引率、$u_t$ は効用関数を表す。）

を以下の予算制約とキャッシュ・イン・アドバンス制約の下で最大化するものとする。

$$Y_t + R_{t-1} b_{t-1} + N_{t-1} \frac{B_{t-1}}{P_t} + \frac{M_{t-1} - P_{t-1} C_{t-1}}{P_t} = b_t + \frac{B_t}{P_t} + \frac{M_t}{P_t},$$

$$\frac{M_t}{P_t} = C_t.$$

$Y_t$, $R_t$, $b_t$, $N_t$, $B_t$, $M_t$, $C_t$, $P_t$ は時点 t における所得、物価連動債の（粗）収益率、物価連動債の保有量、名目債券の名目（粗）収益率、名目債券の保有量、貨幣の保有量、消費、物価水準を表す。この最適化問題は、動的計画法によって次のように表すことができる。

$$V_t = \max \left\{ u_t + \beta E_t V_{t+1} + \lambda_t \left( Y_t + R_{t-1} b_{t-1} + N_{t-1} \frac{B_{t-1}}{P_t} + \frac{M_{t-1} - P_{t-1} C_{t-1}}{P_t} - b_t - \frac{B_t}{P_t} - \frac{M_t}{P_t} \right) + \upsilon_t \left( \frac{M_t}{P_t} - C_t \right) \right\}.$$

最適化の一階の条件は以下のようになる。

$$u_t' + \beta E_t \frac{\partial V_{t+1}}{\partial C_t} = \upsilon_t, \qquad \text{(B－１)}$$

$$\beta E_t \frac{\partial V_{t+1}}{\partial b_t} = \lambda_t, \qquad \text{(B－２)}$$

$$\beta E_t \frac{\partial V_{t+1}}{\partial B_t} = \frac{\lambda_t}{P_t}, \qquad \text{(B－３)}$$

$$\beta E_t \frac{\partial V_{t+1}}{\partial M_t} = \frac{\lambda_t - \upsilon_t}{P_t}, \qquad \text{(B－４)}$$

また、包絡面定理により以下が成立する。

$$\frac{\partial V_t}{\partial C_{t-1}} = -\frac{P_{t-1}}{P_t}\lambda_t, \qquad (\text{B}-5)$$

$$\frac{\partial V_t}{\partial b_{t-1}} = R_{t-1}\lambda_t, \qquad (\text{B}-6)$$

$$\frac{\partial V_t}{\partial B_{t-1}} = \frac{N_{t-1}\lambda_t}{P_t}, \qquad (\text{B}-7)$$

$$\frac{\partial V_t}{\partial M_{t-1}} = \frac{\lambda_t}{P_t}. \qquad (\text{B}-8)$$

まず、（B－1）と（B－5）、（B－4）と（B－8）より、以下の関係が成立する。

$$u_t' - \beta E_t \frac{P_t \lambda_{t+1}}{P_{t+1}} = \upsilon_t,$$

$$\beta E_t \frac{P_t \lambda_{t+1}}{P_{t+1}} = \lambda_t - \upsilon_t.$$

これらの関係式から、次の関係式を得る。

$$u_t' = \lambda_t.$$

これを（B－2）と（B－6）及び（B－3）と（B－7）に適用すると、物価連動債及び名目債券の最適保有についての条件式が導き出される。

$$u_t' = R_t \beta E_t u_{t+1}'. \qquad (\text{B}-9)$$

$$\frac{u_t'}{P_t} = N_t \beta E_t \frac{u_{t+1}'}{P_{t+1}}. \qquad (\text{B}-10)$$

名目債券に関する条件式（B－10）を相対的危険回避度が一定の効用関数によって評価すると、本文中の条件式（3）を得る。